

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

АКОПЯН
Лоран Ваганович

**Томографические методы в квантовой механике
и в квантовой оптике**

Специальность — 01.04.02
Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Долгопрудный — 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» на кафедре «Теоретическая физика».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Манько Владимир Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Амосов Григорий Геннадьевич
кандидат физико-математических наук
Андреев Владимир Андреевич

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына

Защита состоится «17» декабря 2010 г. в 10⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.156.07 при Московском физико-техническом институте (государственном университете) по адресу:

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского физико-технического института (государственного университета).

Автореферат разослан «17» ноября 2010 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного
совета Д 212.156.07
к.ф.-м.н.

Коршунов С.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Одной из важнейших задач современной науки является построение логически полной и математически строгой квантовой теории информации. В течение последнего десятилетия в мире ведутся как теоретические, так и экспериментальные исследования по разработке квантового компьютера. Существенно, что обе эти задачи, опираясь на квантовые явления, используют язык, заимствованный из классической теории информации К. Шеннона [?]. Классическая теория информации основана на теории вероятностей и статистике. Поскольку для считывания информации с квантового компьютера требуется классический прибор, то становится ясным, что для успешного решения этих задач большую роль играет наличие удобного представления квантовой механики, способного одновременно описать классические и квантовые состояния системы на едином вероятностном языке.

Такой язык описания квантовой механики был предложен В. И. Манько и др. [?], [?], [?] в виде нового вероятностного представления квантовой механики. Этот язык состоит в том, что квантовым состояниям ставятся в соответствие определенные неотрицательные и нормированные функции распределения вероятностей – квантовые томограммы. Таким образом, возникает актуальная задача применения томографических методов исследования квантовых состояний к проблемам квантовой теории информации и, в частности, к проблеме запутанных состояний кубитов и кудитов.

Со стороны научного сообщества остается неизменно высоким интерес к экспериментальной проверке границ применимости самой квантовой механики. Более того, все еще остается открытым вопрос о критериях сепарабельности и запутанности квантовых состояний. Последнее, в свою очередь, играет ключевую роль при исследовании квантовых каналов передачи информации, причем особенно актуальным является вопрос об их пропускной способности.

Попытки прямого применения существующих стандартных квантомеханических рецептов к такому кругу задач приводят к затруднительным, а порой и ошибочным выводам, ввиду отсутствия каких бы то ни было классических аналогов, на которые должна базироваться квантовая теория. К указанному кругу задач также относится понимание большого числа известных неравенств вида неравенств Белла-Клаузера-Хорна-Шимони (далее БКХШ) [?], [?], [?] и нарушение некоторых энтропийных соотношений классической шенноновской теории информации в квантовой механике. Актуальной считается задача об экспериментальной точности проверки нарушения этих неравенств. Для ее решения необходимо понимать как именно происходит нарушение данных неравенств при перехо-

де от описания состояний кубитов и кудитов в классической теории информации к квантовой. Для экспериментальной проверки границ применимости квантовой механики очень важны значения конкретных параметров, которые могут быть как вычислены теоретически, так и измерены на опыте.

Поскольку энтропия является одним из основных понятий теории информации, важно исследовать свойства энтропии в квантовой томографии. В частности, для различных модельных систем из нескольких кубитов и кудитов важно сопоставить нарушения энтропийных неравенств с нарушениями неравенств Белла. В связи с этим разработка единого математического аппарата для описания и анализа различных мер запутанности представляет собой существенный интерес.

Другим актуальным направлением развития томографических методов в квантовой оптике является квантовая томография сжатых состояний [?] вакуума электромагнитного поля [?], [?]. Сжатые состояния света представляют существенный интерес в задаче детектирования гравитационных волн и имеют многочисленные другие применения (см. [?]) в технике. Наряду с состояниями Белла они являются источником запутанности, степень которой можно измерить экспериментально. Для использования сжатых состояний очень важно знание их вероятностных характеристик, например, статистики распределения фотонов в многомодовом сжатом вакууме электромагнитного поля.

Известно, что сжатые состояния света демонстрируют неклассическое поведение обусловленное квантовыми корреляциями между модами электромагнитного поля [?]. Поскольку квантовая томография позволяет, в принципе, вычислить любые вероятностные характеристики систем посредством усреднения по заданным томографическим распределениям вероятностей, интересна задача вычисления квантовых томограмм для многомодового сжатого вакуума электромагнитного поля.

В свете вышесказанного, представленные исследования являются актуальными.

Цели и задачи работы

В диссертации исследуются симплектические томограммы, томограммы центра масс и томограммы числа фотонов в квантовых системах с непрерывными и дискретными наблюдаемыми. Для дискретных квантовых динамических систем из общих принципов вероятностного представления квантовых состояний выводится общая схема построения неравенства вида БКХШ. Для непрерывных квантовых систем рассчитываются все три вида томограмм и с помощью распределения томографических вероятностей анализируются корреляционные свойства сжатых состояний вакуума электромагнитного поля.

Целью диссертации является приложение классической и квантовой томографии к различным задачам квантовой теории информации и квантовой оптики,

для которых стандартные способы решения задач квантовой механики не дают какого-нибудь значительного результата или даже приводят к сложным концептуальным проблемам. Поставленная цель предполагает решение ряда задач, а именно:

1. Определить общий вид неравенств БКХШ для многокудитных состояний на основании томографических методов представления квантовых состояний;
2. Вывести неравенства вида БКХШ для случая дискретных динамических систем в рамках вероятностного представления классической статистической механики;
3. Обобщить результаты задачи 2 для квантовых битов (кубитов) и кудитов - построить универсальный математический аппарат для вывода неравенств БКХШ и расчета их верхних границ, пригодный для классических и квантовых состояний;
4. Сравнить полученные значения для верхних границ классических и квантовых корреляций (верхние границы неравенств БКХШ) и определить области нарушения неравенств БКХШ в квантовой механике;
5. Развить понятие томографической энтропии для изолированных подсистем и составных систем до практических и окончательных расчетов для систем из нескольких кубитов и кутритов;
6. Убедиться в нарушении энтропийных неравенств классической теории информации Шеннона для квантовых томографических энтропий. Определить области “классичности” и “квантовости” многокудитных систем по отношению к нарушению энтропийных неравенств;
7. Пользуясь результатами задач 4 и 6, выявить области, в которых нарушаются одновременно энтропийные неравенства и неравенства БКХШ. Численным моделированием состояний двух кубитов попробовать найти зависимость между параметрами (углами Эйлера), при которой нарушаются оба неравенства, т.е. выяснить, существует ли связь между этими двумя неравенствами;
8. Путем прямого расчета вычислить симплектическую томограмму, томограмму центра-масс и томограмму числа фотонов для одномодового и двухмодового сжатого состояния вакуума электромагнитного поля. Обобщить полученные выражения в случае n -модового сжатого вакуума поля. Вычислить средние и дисперсии томографических квадратур и установить связи между ними;
9. Найти интегральные преобразования, которые связывают между собой все три томограммы одного и того же состояния;

10. Получить новые интегральные соотношения между одномерными и двумерными полиномами Эрмита и полиномами Лагерра пользуясь результатами задачи 9.

В целом работа развивает вероятностное представление квантовой механики и квантовой оптики. При этом предметом исследования являются составные дискретные и непрерывные квантовые системы. Основная цель работы — установить количественные характеристики для описания квантовых корреляций в этих системах.

Выбор объекта и предмета исследования, в частности, систем содержащих небольшое количество кубитов и кутритов, обусловлен перспективностью использования в области квантовой теории информации аналитических и численных результатов, полученных при работе над диссертацией.

Научная новизна диссертации заключается, во-первых, в обобщении ранее рассмотренных неравенств БКХШ на случай произвольных многокудитных систем с общим видом квантовых корреляций. В частности, разработан новый математический аппарат для расчета верхних границ неравенств БКХШ для классических и квантовых систем. Впервые приводится последовательный вывод обобщенных неравенств БКХШ в вероятностном представлении квантовых состояний. Выведена универсальная для классической и квантовой теорий формула, позволяющая рассчитать числа БКХШ по определенной стохастической матрице, ассоциированной с данной системой. Одно из главных достоинств данного подхода в том, что он применим и к классическим, и к квантовым состояниям. Для описания квантовых состояний, таких как сжатые состояния света или многоспиновые состояния кудитов, разработаны универсальные и хорошо адаптированные для решения задач квантовой теории информации математические методы.

В работе впервые исследовался вопрос о связи верхних границ томографических энтропий с верхними границами обобщенных неравенств БКХШ для запутанных состояний составных систем. В работе показано, что такой связи в общем случае не существует и для исследования систем на предмет запутанности или сепарабельности состояний необходимо (но не достаточно) рассматривать верхние границы обоих видов неравенств. В качестве иллюстраций данного вывода рассмотрены некоторые простые системы с несколькими кубитами и кутритами. Дано непосредственное обобщение понятия совместной томографической энтропии для произвольных многокудитных состояний. В работе содержится ряд конкретных приложений обобщенной классической шенноновской энтропии в квантовой томографии.

Томографические методы исследования состояний в диссертации приобрели важное значение в связи с подробным анализом квантовой томографии актуальных квантовых состояний, известных как сжатые вакуумные состояния электро-

магнитного поля. Сжатый вакуум играет особо важную роль при попытках детектирования гравитационных волн. Одномодовые состояния сжатого вакуума хорошо известны, тогда как двухмодовые состояния значительно менее исследованы.

Научная новизна в применении томографических методов в квантовой оптике заключается, во-первых, в прямом расчете трех плотностей распределения томографических вероятностей двухмодового сжатого вакуума. Во-вторых, в диссертации дается в явном виде закон преобразования симплектической томограммы в томограмму числа фотонов. В связи с этим пересмотрено выражение для томограммы числа фотонов и установлено новое интегральное соотношение между двумерными полиномами Эрмита и полиномами Лагерра. В работе впервые были рассчитаны средние значения и дисперсии двух действительных квадратур электромагнитного поля на основании полученного выражения для симплектической томограммы. Таким же образом получено значение квантовых корреляций между двумя квадратурами поля. Новизна диссертационной работы также проявлена в расчете точного выражения для томограммы центра масс. На основании только общих формул квантовой томографии удалось рассчитать также среднее и дисперсию действительной квадратуры поля. Таким образом, помимо основных новых результатов диссертация содержит также ряд методик расчетов, имеющих практическую важность в квантовой оптике и в квантовой теории информации.

Теоретическая и практическая значимость работы

Как известно, в последние годы назревает технологический прорыв в реализации процессов квантовой передачи информации и квантовых вычислений. Попытки экспериментальной реализации первых квантовых компьютеров требуют новых теоретических методов расчета вероятностных характеристик динамических квантовых систем. В этом ключе развитый в настоящей диссертации метод изучения состояний посредством симплектических томограмм (спиновые томограммы в случае дискретных систем и симплектические или томограммы центра масс сжатых состояний для непрерывных систем) позволяет изучать свойства квантовых состояний (в частности, представляющих большой интерес запутанных состояний) непосредственно по значениям томографических параметров эксперимента. Вывод неравенств Белла и расчет их верхних границ делает диссертацию ценной в теоретическом плане, поскольку вывод содержит механизм нарушения этих неравенств, а также их связь с явлением запутанности в системах из нескольких кубитов и кудитов. Отметим, что каждое новое неравенство, напоминающее неравенство Белла, имеет уже само по себе научную ценность. Поэтому разработанный общий аппарат для расчета верхних границ неравенств БКХШ в случае любых многокудитных систем представляет собой существенный результат.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. “Полугруппы и вероятностное представление квантовой механики”, Ежегодная научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный (2009).
2. “Неравенства Белла и квантовая томография”, Летняя школа ПМФ, Секция “Теоретическая Математическая Физика”, г. Долгопрудный (2010).
3. “Bell-type inequalities and Upper bounds of multi-qudit states”, *Poster presentation in XIII International Conference on Quantum Optics and Quantum Information*, Kyiv, Ukraine (2010).
4. “Quantum Tomography of Multi-mode Squeezed Vacuum States of Light”, *Poster presentation in Laser Physics 2010 International Conference*, Ashtarak, Armenia (2010).
5. Результаты работы были представлены на общепредметном семинаре кафедры теоретической физики Московского физико-технического института.
6. Результаты работы докладывались на семинаре Отделения теоретической физики НИИЯФ МГУ имени Д.В. Скобельцына.

Публикации

По теме диссертации опубликовано семь статей и два препринта. Из них пять — в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией для публикации результатов кандидатских диссертаций и две публикации в трудах научных конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Вклад автора в совместных работах

Диссертационная работа отражает личный вклад автора в проведенные исследования. Научным руководителем, д. ф.-м. н., профессором В. И. Манько, была определена область исследований, осуществлялось общее руководство, оказывалась методологическая помощь, проводилось обсуждение полученных результатов.

Структура и объем диссертации

Диссертация включает в себя оглавление, введение, четыре главы, заключение, приложение и список цитируемой литературы. Каждая глава имеет выводы, в которых сформулированы основные результаты по данной главе. Полный объем диссертации составляет 150 страниц, в том числе 15 рисунков и 8 таблиц. Список литературы включает 150 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждаются основные направления исследования квантовой томографии и формулируются проблемы, решению которых посвящена диссертация.

В первой главе дается краткий обзор основных из существующих квазираспределений, описывающих состояния в квантовой механике и в квантовой оптике. На примере схемы квантования Вигнера-Вейля вводятся функция Вигнера, функция Глаубера-Сударшана, функция Хусими-Кано и квантовая томограмма состояния. Далее вводится понятие симплектической томограммы, как положительного нормированного распределения вероятностей, описывающее состояние с оператором плотности $\hat{\rho}$. Симплектическая томограмма определяется как прямое преобразование Радона оператора плотности

$$w_s(X, \mu, \nu) = \text{Tr} \hat{\rho} \delta(X - \mu \hat{q} - \nu \hat{p}). \quad (1)$$

Здесь $\hat{q}, \hat{p}$ — операторы вещественных квадратур поля, X — собственное значение преобразованного оператора квадратур $\hat{Q} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p}$ в сжатой и повернутой системе отсчета, параметры μ, ν — вещественные числа, которые задают повернутую и сжатую систему координат на фазовой плоскости q, p , в которой измеряются значения величины X . С учетом того, что в следующих главах исследуются вполне определенные системы, в первой главе значительное место уделено обзору вопросов суперпозиции квантовых томограмм и экспериментальным способам проверки соотношений неопределенностей Шредингера-Робертсона. Полученные томограммы проверялись по общим формулам суперпозиции и соотношению неопределенностей.

В диссертации выделено достаточное место для проверки замкнутости томографической теории. Пусть $w_s(X, \mu, \nu)$ — симплектическая томограмма чистого состояния с неизвестной волновой функцией $\psi(x)$. Волновую функцию можно восстановить по формуле:

$$\psi(x) = \frac{\int w_s(Y, \mu, x) \exp i \left(Y - \frac{\mu x}{2} \right) dY d\mu}{\sqrt{2\pi \int w_s(Y, \mu, 0) e^{iY} dY d\mu}} \cdot e^{i\varphi}, \quad (2)$$

где φ — произвольная фаза. В диссертации эта формула проверяется на примере состояний кота Шредингера, состояний Белла и многомодового сжатого вакуума электромагнитного поля.

Во второй главе строится томографическое представление многокудитных состояний и исследуются нелокальные квантовые корреляции, приводящие к нарушениям неравенств БКХШ в квантовой механике. Пусть из соображения простоты имеется система из двух кубитов, и пусть удвоенные проекции спинов обоих

кубитов на заданные оси квантования равные $m, m' = \pm 1$. Тогда из всевозможных вероятностей $w_{mm'}^{ik}$ исходов измерения проекций каждого из кубитов можно составить стохастическую матрицу

$$M_{2 \otimes 2} = \begin{pmatrix} w_{++}^{13} & w_{++}^{14} & w_{++}^{23} & w_{++}^{24} \\ w_{+-}^{13} & w_{+-}^{14} & w_{+-}^{23} & w_{+-}^{24} \\ w_{-+}^{13} & w_{-+}^{14} & w_{-+}^{23} & w_{-+}^{24} \\ w_{--}^{13} & w_{--}^{14} & w_{--}^{23} & w_{--}^{24} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь верхние индексы $i = 1, 2$, $k = 3, 4$ обозначают пары углов измерений (1, 2) и (3, 4) над первым и вторым кубитами соответственно.

В диссертации используется следующее представление среднего значения квантовых корреляций в системе из двух кубитов:

$$\langle m_1 m_2 \rangle = \sum_{m_1, m_2} m_1 m_2 w_{m_1 m_2} = \text{Tr} (E_{2 \otimes 2} M_{2 \otimes 2}). \quad (4)$$

Матрица $E_{2 \otimes 2}$ здесь имеет вид

$$E_{2 \otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В общем случае для системы из двух кубитов размерностей j_1 и j_2 в состоянии с матрицей плотности $\hat{\rho}$ вводится квантовая томограмма как вектор вероятности

$$w(m_1, m_2, \hat{U}_1, \hat{U}_2) = \langle m_1 m_2 | \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 \hat{\rho} \hat{U}_2^\dagger \otimes \hat{U}_1^\dagger | m_1 m_2 \rangle, \quad (6)$$

с элементами $m_i = -j_i, \dots, j_i$, $i = 1, 2$, которые составляют стохастическую матрицу аналогичную (??).

Поскольку в томографическом представлении усреднение производится по стандартной формуле теории вероятностей

$$\begin{aligned} & \langle m_1 m_2 \dots m_d \rangle_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_d} = \\ & = \sum_{m_1 m_2 \dots m_d} w(m_1, m_2, \dots, m_d, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_d) m_1 m_2 \dots m_d, \end{aligned} \quad (7)$$

то классические статистические корреляции можно также записать в виде формулы (??), т.е.

$$\begin{aligned} & B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Tr}(M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \hat{C}) = \\ & = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_2) + \mathbf{C}_3(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_4(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где матрица C обобщает найденную ранее для системы из двух кубитов матрицу E . Векторы $\mathbf{C}_i$ с $i = 1, 2, 3, 4$ обозначают четыре столбца матрицы C . Стохастическая матрица $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для сепарабельного случая имеет вид

$$M_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = M_{\mathbf{x}} \otimes M_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 - x_1 & 1 - x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 - y_1 & 1 - y_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь x_i, y_j , где $i, j = 1, 2$, — вероятности случайного исхода 1 или 2 в двух различных подсистемах и введены векторы $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$.

Поскольку функция (??) всюду гармоническая, легко найти все ее верхние границы. На этом основании мы можем обобщить полученные результаты на любую дискретную квантовую или классическую динамическую системы. Так для системы из трех кубитов получаем

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 2 \otimes 2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = & -6 + 8x_2y_1z_1 + 8x_1y_2z_2 + 8x_2y_2z_1 - 8x_2y_2z_2 - \\ & -8x_1z_1 + 8x_2y_1z_2 - 8y_1z_2 - 8y_1z_1 + 8x_1y_2z_1 - 8x_2z_1 - \\ & -8x_1z_2 - 8x_2y_1 - 8x_1y_2 + 8x_1 + 4x_2 + 8y_1 + 4y_2 + \\ & + 8z_1 + 4z_2 - 8y_1x_1 + 8x_1y_1z_1 + 8x_1y_1z_2 - 8y_2z_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычислив все верхние границы функции (??) и выбрав наибольшую из них, получаем верхнюю границу равной 6. Соответствующая квантовая функция корреляций исходов измерений проекции спинов кубитов намного сложнее. Выпишем для справки первый из восьми членов суммы входящий в функцию БКХШ для трех кубитов

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 2 \otimes 2}(\theta_1, \theta_3, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6) = \\ = 8 \cos(-\varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_6) \times \\ \times \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_6}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_6}{2}\right). \end{aligned}$$

Билинейная форма $B_{2 \otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$, описывающая классические статистические корреляции между битом и тритом, имеет вид

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = & 4 + 4x_1z_1 - 2x_2t_2 + 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + \\ & + 4x_2z_1 + 4x_2y_1 + 2x_2z_2 + 2x_1z_2 + 2x_1t_2 + \\ & + 4x_1t_1 - 6x_1 - 2x_2 - 4y_1 - 4z_1 - 2y_2 - 2z_2 + 2x_2y_2 - 4x_2t_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Выбирая три направления для измерения кутрита и два направления для измерения кубита, по аналогичной формуле получаем билинейную форму $B_{2 \otimes 3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$, описывающую квантовые нелокальные корреляции:

$$\begin{aligned} B_{2 \otimes 3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \\ \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_4) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) + \\ \cos(\theta_1) \cos(\theta_5) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_5). \end{aligned} \quad (12)$$

Таблица ?? показывает одно из нарушений неравенств БКХШ для системы кубит-кутрит. Нарушение неравенства было обнаружено в результате численного расчета всевозможных верхних пределов выражения (??) при выборе направлений 1 и 2 для кубита и трех направлений 1', 2', 3' для кутрита.

Углы измерений	Направления кубита и кутрита				
	1	2	1'	2'	3'
φ	0.0004	3.1450	0	0	0
θ	0.2368	0.2538	3.1471	3.1292	1.6024
Число Белла	$B_{2\otimes 3} = 4.0612$				

Таблица 1 – Нарушение неравенства БКХШ для системы кубит-кутрит

Из рисунков ?? и ?? можно получить наглядное представление о нарушении неравенств БКХШ в рамках разработанной томографической модели в случае системы двух кубитов.

Рисунок 1 – Билинейная функция $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ в окрестности границы Цирельсона как функция от θ_1 .

Третья глава посвящена аналитическому описанию томографических энтропий и исследованию эффектов, связанных с нарушением энтропийных неравенств классической теории информации Шеннона и в квантовой томографии.

Рисунок 2 – Билинейная форма $B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ как функция θ_2 и θ_4

Пусть составная система состоит из двух подсистем. В классической теории информации справедливы неравенства:

$$H(1, 2) \leq H(1) + H(2), \quad H(1) \leq H(1, 2), \quad H(2) \leq H(1, 2) \quad (13)$$

Второе и третье неравенства (??) показывают неотрицательность относительных энтропий в классической теории информации и нарушаются в квантовой теории информации.

Пусть заданы четыре направления измерения кубитов $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_k$, определяемые парами углов Эйлера $\mathbf{n}_i(\varphi_i, \theta_i)$ и $\mathbf{n}_k(\varphi_k, \theta_k)$. Каждое из этих направлений определяет некоторое преобразование (поворот $SU(2)$) состояния кубита. По четырем унитарным матрицам поворота $U(\mathbf{n}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, построим стохастическую матрицу $M_{2\otimes 2}(U_1, U_2, U_3, U_4)$, столбцы которой представляют собой дискретное распределение вероятностей тех или иных значений проекции суммарного спина составной системы из двух кубитов. Обозначим ради краткости операторы поворота $U(\mathbf{n}_i)$ символами U_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Для матриц операторов поворота будем использовать те же обозначения, но без шляпок.

Основной результат третьей главы содержится в новом определении энтропии

составной системы кубитов в вероятностном представлении:

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) &= \\
&= - \sum_{i,k}^4 w(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_k) \ln w(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_k) =. \quad (14) \\
&= -Tr (M_{2 \otimes 2}(U_1, U_2, U_3, U_4) \ln M_{2 \otimes 2}(U_1, U_2, U_3, U_4))
\end{aligned}$$

Томографическая энтропия двух кубитов (см. рисунок ??) становится таким образом функцией восьми углов. Пользуясь формулой (??) можно провести анализ сепарабельных и запутанных состояний системы, а также установить верхние границы для нарушения энтропийных соотношений (??). На рисунке ?? изображены области квантовости и классичности состояний двух кубитов по энтропийному признаку сепарабельности.

Рисунок 3 – Взаимная энтропия $H_{2 \otimes 2}(\theta_1)$ как функция от угла первого измерения первого кубита θ_1

В шестой части третьей главы исследуется вопрос о возможной взаимосвязи между неравенствами БКХШ и энтропийными неравенствами теории информации. Для этого численно моделировались состояния кубит-кубит, кубит-кутрит, кутрит-кутрит и кубит-кубит-кубит; выделялись те области, в которых одновременно нарушаются оба неравенства, и выделялись систематические совпадения параметров областей углов Эйлера, нарушающих эти неравенства. Численный анализ показывает взаимную независимость этих неравенств.

Рисунок 4 – Взаимная энтропия $H_{2\otimes 2}(\theta_2, \theta_4)$ как функция от углов измерений θ_2 и θ_4

В четвертой главе исследуются квантовые томограммы двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля. Волновая функция одномодового сжатого вакуума электромагнитного поля дается гауссовским пакетом:

$$\psi_s(x) = N \exp(ax^2 + bx), \quad |N| = \sqrt[4]{\frac{-2a_1}{\pi}} \exp \frac{1}{4} \frac{b_1^2}{a_1}, \quad a_1 < 0, \quad (15)$$

где введены обозначения $Rea = a_1$, $Reb = b_1$, $Ima = a_2$ и $Imb = b_2$ для параметров сжатия и сдвига вакуума поля.

Волновая функция чистого состояния двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля записывается в виде гауссиана

$$\begin{aligned} \psi_s(\mathbf{x}) &= N e^{\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{x}^T}, \\ |N| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2 \right)^{1/4} \times \exp -\frac{1}{4} \frac{(A_1 E_1^2 - C_1 D_1 E_1 + B_1 D_1^2)}{A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Волновая функция двухмодового сжатого вакуума (??) представляет собой прямое обобщение одномодового сжатого вакуума (??). Двухмодовый сжатый вакуум (??) описывается пятью комплексными параметрами A, B, C, D, E или десятью действительными $ReA = A_1, ReB = B_1, ReC = C_1, ReD = D_1, ReE = E_1, ImA = A_2, ImB = B_2, ImC = C_2, ImD = D_2, ImE = E_2$.

Томограмма счета фотонов для одной моды электромагнитного поля была введена в [?]:

$$w_\gamma(n, \alpha) = \langle n | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{\rho} \hat{D}(\alpha) | n \rangle, \quad (18)$$

здесь $\hat{D}(\alpha)$ – оператор сдвига, α – величина сдвига на фазовой плоскости, а n задает число фотонов в одной моде поля. В работе проводится вычисление томограмм (??) и (??) и затем, используя связь между ними [?], получатся новое соотношение между полиномами Эрмита и Лагерра:

$$\begin{aligned} w_\gamma(0, 0) & \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha_0 M \alpha_0}}{2^n n!} \left(\frac{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_1}{1 + 4a_1^2 + 4a_2^2 - 4a_1} \right)^{n/2} \times \\ & \times \left| H_n \left(\frac{2b + \sqrt{2}\alpha(2a - 1) + \sqrt{2}\alpha^*(2a + 1)}{2\sqrt{1 - 4a^2}} \right) \right|^2 e^{-\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)M(\alpha - \alpha_0)} = \quad (19) \\ & = \int \frac{e^{i(X - \mu q - \nu p)}}{2\pi} e^{-\frac{\mu^2 + \nu^2}{4}} L_n \left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{XX}}} e^{-\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2\sigma_{XX}}} dX d\mu d\nu. \end{aligned}$$

Здесь $w_\gamma(0, 0)$ обозначает вероятность не обнаружить ни одного фотона

$$\begin{aligned} w_\gamma(0, 0) & = \sqrt{\frac{-8a_1}{4a_1^2 - 4a_1 + 4a_2^2 + 1}} \times \\ & \times \exp \left(\frac{b_1^2 + 4a_1^2 b_2^2 + 4a_2^2 b_1^2 - a_1 (2b_1^2 + 8a_2 b_1 b_2 + 2b_2^2)}{2a_1 (4a_1^2 - 4a_1 + 4a_2^2 + 1)} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

а H_n и L_n – полиномы Эрмита и Лагерра.

Вектор α_0 и матрица M были рассчитаны и приведены в Приложении А к диссертации. Среднее $\langle X \rangle$ и дисперсия σ_{XX} выражаются через параметры волновой функции сжатого вакуума и также приведены в Приложении А.

В третьей части четвертой главы диссертации исследуется симплектическая томограмма двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля. Рассмотрим двухмодовый сжатый вакуум электромагнитного поля, описываемый операторами обобщенных координат и импульсов (гомодинные квадратуры поля) $\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2$ первой и второй мод, соответственно.

Положим $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)^T$ и $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)^T$. Пусть $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ и $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)^T$ — два действительных вектора, содержащих информацию о сжатиях и поворотах квадратур поля. Обозначим через X_1, X_2 вещественные амплитуды первой и второй мод сжатого вакуума поля. Томограмма двухмодового поля определяется формулой:

$$w_s(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \text{Tr} \hat{\rho} \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2). \quad (21)$$

В диссертации проводится вычисление томограммы (??) с волновой функцией (??), которое приводит к результату:

$$w_s(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}. \quad (22)$$

Расчет вектора $\mathbf{X}_0$, обозначающего средние томографические наблюдаемые X_i и дисперсии $\sigma_{\mathbf{X}}$, приводится в Приложении А.

В четвертой части четвертой главы исследована симплектическая томограмма центра масс двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля. Томограмма центра масс определяется формулой [?]:

$$w_c(X, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \text{Tr} \hat{\rho} \delta(X - \boldsymbol{\mu} \hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\nu} \hat{\mathbf{p}}), \quad (23)$$

где $\mathbf{ab}$ — скалярное произведение векторов. Соответствующий расчет дает

$$w_c(X, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_{X_c X_c}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(X - \langle X \rangle_c)^2}{\sigma_{X_c X_c}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})}}. \quad (24)$$

Среднее и дисперсия равны

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle_c = \mu_1 \langle q_1 \rangle + \nu_1 \langle p_1 \rangle + \mu_2 \langle q_2 \rangle + \nu_2 \langle p_2 \rangle, \\ \sigma_{X_c X_c} = \mu_1^2 \sigma_{q_1 q_1} + 2\mu_1 \nu_1 \sigma_{q_1 p_1} + \nu_1^2 \sigma_{p_1 p_1} + \mu_2^2 \sigma_{q_2 q_2} + 2\mu_2 \nu_2 \sigma_{q_2 p_2} + \\ + \nu_2^2 \sigma_{p_2 p_2} + 2\mu_1 \mu_2 \sigma_{q_1 q_2} + 2\mu_1 \nu_2 \sigma_{q_1 p_2} + 2\nu_1 \mu_2 \sigma_{p_1 q_2} + 2\nu_1 \nu_2 \sigma_{p_1 p_2}. \end{array} \right. \quad (25)$$

Здесь средние и дисперсии исходных квадратур поля (q, p) даны в Приложении А. По полученным выражениям (??) – (??) была проверена справедливость общего соотношения между симплектической томограммой и томограммой центра масс:

$$w_c(X, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) = \int w_s(Y_1, Y_2, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2) \delta(X - Y_1 - Y_2) dY_1 dY_2. \quad (26)$$

В пятой части четвертой главы диссертации исследуется томограмма числа фотонов двухмодового сжатого вакуума. В случае двухмодового сжатого вакуума было получено соотношение аналогичное (??):

$$w_\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \frac{e^{\frac{1}{2} \mathbf{Q}_0 \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{Q}_0}}{2^{n_1+n_2} \mathbf{n}!} |H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y})|^2 e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0) \sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\det \sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}}} \times$$

$$\times \int d\mathbf{X} d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{\nu} e^{i(X_1+X_2-\boldsymbol{\mu}\mathbf{q}-\boldsymbol{\nu}\mathbf{p})} L_{n_1} \left(\frac{\mu_1^2 + \nu_1^2}{2} \right) L_{n_2} \left(\frac{\mu_2^2 + \nu_2^2}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}, \quad (27)$$

где $H_{\mathbf{n}}^{\{R\}}(\mathbf{y})$ представляют собой полиномы Эрмита двух переменных из [?]. Ради удобства записи введен вектор $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$. В диссертации проводилось вычисление средних $\mathbf{X}_0$. Функции L_{n_i} , $i = 1, 2$ — полиномы Лагерра. Вероятность не обнаружить ни одного фотона ни в одной из мод дается выражением:

$$w_\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{2 \left(A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2 \right)^{1/2}}{|\det A - \frac{1}{2} \text{Tr} A + \frac{1}{4}|} \exp -\frac{1}{2} \frac{(A_1 E_1^2 - C_1 D_1 E_1 + B_1 D_1^2)}{A_1 B_1 - \frac{1}{4} C_1^2} \times$$

$$\times \left| \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{(A - \frac{1}{2}) E^2 + (B - \frac{1}{2}) D^2 + C D E}{(A - \frac{1}{2})(B - \frac{1}{2}) - \frac{C^2}{4}} \right) \right|^2. \quad (28)$$

Величины $\mathbf{Q}_0$, $\sigma_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$ и матрица R вычислены и приведены в Приложении А.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертации.

Основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Построена нелокальная томографическая теория-модель, позволяющая вывести для системы из произвольного количества кубитов классические и квантовые неравенства БКХШ и вычислить их верхние границы. В рамках данной модели рассмотрены неравенства БКХШ и установлены параметры их нарушения в области квантовой механики в системах из одного кубита и одного кутрита и трех кубитов и двух кутритов. Модель апробирована на известных результатах запутанных состояний Белла и состояний Вернера [?]. Одно из основных достоинств модели в том, что она позволяет вычислить квантовые корреляции по заданным параметрическим распределениям вероятностей. Построенная модель реализовывает идею томогра-

фического способа описания квантовых состояний посредством специальных стохастических матриц, которые ассоциируются с данным состоянием и могут быть измерены непосредственно на опыте. Таким образом, предложенная модель позволяет вычислить квантовые корреляции по параметрам измерений наблюдаемых, например по измерениям значения проекции спинов на различные оси квантования. Пользуясь построенной томографической моделью описания квантовых и классических состояний составных многокудитных систем получены новые неравенства обобщающие неравенства БКХШ. Данные результаты отражены в публикациях [?], [?].

2. Для системы из кубит-кутрит, двух кутритов и трех кубитов были рассчитаны значения классических и квантовых верхних границ неравенства БКХШ. Для системы кубит-кутрит численно оценен аналог границы Цирельсона. Для остальных систем приведен расчет для классических верхних границ. Для тех же систем определены совместные и относительные томографические энтропии. Численным расчетом показано нарушение энтропийных неравенств классической теории информации Шеннона в квантовой области. Исследован вопрос совместимости неравенств БКХШ с энтропийными неравенствами и их возможной общей связи. Установлен отрицательный результат: несмотря то, что нарушения неравенств БКХШ и энтропийных неравенств обусловлены одним и тем же квантовым эффектом – квантовыми корреляциями между подсистемами, эти неравенства описывают разные аспекты таких корреляций и не могут быть объединены в единое неравенство. Численный расчет перекрытия областей значений параметров (углов измерений) приводящих к нарушению обоих неравенств показал, что эти неравенства независимы. Результаты опубликованы в работе [?].
3. Построена модель описания двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля в вероятностном представлении квантовой оптики. Получены симплектические томограммы двухмодового сжатого вакуума электромагнитного поля в виде симплектической томограммы и томограммы центра масс. Вычислены средние и дисперсии томографических амплитуд X_1 , X_2 и X_c , а также установлены соотношения между ними. Получено явное выражение для ядра перехода от симплектической томограммы $w_s(X)$ к томограмме числа фотонов $w_\gamma(\alpha, n)$ в одномерном случае. Получено явное выражение для томограммы числа фотонов для двухмодового сжатого вакуума. Результат перехода от симплектической томограммы к томограмме числа фотонов в случае одной моды обобщен на двухмодовый и многомодовые случаи. Получено соотношение между полиномами Эрмита двух переменных и полиномами Лагерра. Общий результат проведенных исследований состоит в построении томографической модели квантовых корреляций между раз-

личными модами сжатого вакуума электромагнитного поля. Эти результаты опубликованы в работах [?], [?].

Список публикаций по теме диссертации

1. Loran V. Akopyan and Vladimir I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **30**, 1 (2009).
2. Loran V. Akopyan, Vladimir I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **30**, 4 (2009).
3. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, D. K. Udumyan, *Journal of Russian Laser Research*, **31**, 1 (2010).
4. Loran V. Akopyan and Vladimir I. Man'ko, *Journal of Russian Laser Research*, **40**, 6 (2010).
5. Loran V. Akopyan and Vladimir I. Man'ko, *Journal of Optics and Spectroscopy*, (2010), готовится к печати.
6. Акопян Л.В., Манько В.И., *Вероятностное представление квантовых состояний*, Учебное пособие, МФТИ (2010), готовится к печати.

Цитированная литература

1. Shannon C. E., *Bell System Tech. J.*, **27**, 379 (1948).
2. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 615-624 (1995).
3. S. Mancini, V. I. Man'ko and P. Tombesi, *Phys. Lett. A*, **213**, 1-2, 1-6 (1996).
4. A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**, 065013 (2009), DOI: 10.1088/0031-8949/79/06/065013.
5. Bell J. S., *Physics*, **1**, 195 (1964).
6. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A. and Holt R. A., *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 880 (1969).
7. B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.*, **4**, 93, (1980).
8. V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4** R1 (2002) DOI: 10.1088/1464-4266/4/1/201.
9. G. Schrader, V. M. Akulin, V. I. Man'ko, and W. P. Schleich, *Phys. Rev. A*, **48**, 2398-2406 (1993).
10. O. V. Man'ko and G. Schrader, *Phys. Scr.*, **58**, 228 (1998).
11. W. P. Schleich, "Quantum Optics in Phase Space", Wiley (2001).
12. R. J. Glauber, "Quantum Theory of Optical Coherence, Selected Papers and Lectures", WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim, ISBN: 978-3-527-40687-6, (2007).

13. S. Mancini, P. Tombesi and V. I. Man'ko, *Europhys. Lett.*, **37**, 2, 79–83 (1997).
14. R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **40**, 4277 (1989).
15. A. S. Arkhipov, Yu. E. Lozovik and V. I. Man'ko, *Physics Letters A*, **328**, 6, 419-431 (2004) DOI:10.1016/j.physleta.2004.06.039.
16. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *J. Math. Phys.*, **35**, 4277 (1994).

Акопян Лоран Ваганович

**Томографические методы в квантовой механике
и в квантовой оптике**

Подписано в печать 12.11.2010 г.

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 1.0.

Тираж 70 экз. Заказ № ф-175.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Отдел автоматизированных издательских систем
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9