



Томографические методы в квантовой механике и квантовой оптике

Диссертант: Акобян Лоран Ваганович
Научный руководитель: Манько Владимир Иванович



Структура доклада

- ▶ В начале 90-х годов было сформулировано новое *вероятностное представление квантовой механики*. В нем носителем теории является не волновая функция или оператор плотности, а неотрицательное распределение вероятностей – т.н. **квантовая томограмма**.
- ▶ Оказывается, что представление квантовых состояний с помощью томограммы – эффективный инструмент расчета неравенств Белла и исследования запутанных и сепарабельных состояний.
- ▶ Исследованы энтропийные неравенства для составных систем из нескольких кубитов; выведена общая формула для томографических энтропий и проверено нарушение энтропийных неравенств Белла.
- ▶ Вероятностное представление применимо к сжатым состояниям вакуума электромагнитного поля.





Квантовая томография

- ▶ В классической статистической механике состояния описываются функцией плотности распределения вероятностей $f(q, p, t)$.

$$w(X, \mu, \nu) = \int f(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp$$

- ▶ В квантовой оптике состояния можно описать функцией Вигнера. Квантовая томограмма – компонента Радона функции Вигнера.

$$w(X, \mu, \nu) = \int W(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp$$





Спиновая томограмма кубита

$$\mathbf{w}(\hat{\rho}, \hat{U}) = \text{Diag}(\hat{U}^\dagger \hat{\rho} \hat{U}) = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 \rho_{11} + u_{11} \overline{u_{21}} \rho_{21} + u_{21} \overline{u_{11}} \rho_{12} + |u_{21}|^2 \rho_{22} \\ |u_{12}|^2 \rho_{11} + u_{12} \overline{u_{22}} \rho_{21} + u_{22} \overline{u_{12}} \rho_{12} + |u_{22}|^2 \rho_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}(\hat{\rho}, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho_{11} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin \theta \text{Re}(\rho_{12} e^{-i\varphi}) + \rho_{22} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \rho_{11} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta \text{Re}(\rho_{12} e^{-i\varphi}) + \rho_{22} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle m_1 m_2 \dots m_d \rangle_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_d} = \sum_{m_1 m_2 \dots m_d} w(m_1, m_2, \dots, m_d, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_d) m_1 m_2 \dots$$

$$\langle m_1 m_2 \rangle_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \sum_{m_1 m_2 = \pm 1} m_1 m_2 w(m_1, m_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$



$$|C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq 2$$

$$B_w(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + C(\mathbf{c}, \mathbf{d}) - C(\mathbf{a}, \mathbf{d})$$

$$-2 \leq B_w(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \leq 2$$

$$|B_w(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq |B_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq 2$$

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = C(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = -C(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta_{\mathbf{ab}} = 2\pi - \theta_{\mathbf{cb}} = \theta_{\mathbf{cd}} = \pi - \theta_{\mathbf{ad}} = \frac{\pi}{4}$$

$$B_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = B_w(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 4C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 2\sqrt{2} > 2$$

Неравенства Белла

В квантовой механике неравенства Белла могут быть нарушены.

Одной из целей было выявить причину этих нарушений как следствие квантовых корреляций между подсистемами.

Показываем каким образом подобрать углы измерения кубитов, чтобы нарушить неравенство $B \leq 2$.

$$M_{2\otimes 2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1-x_1 & 1-x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 1-y_1 & 1-y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ w_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{24}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ w_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{34}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ w_{41}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{42}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{43}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & w_{44}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$M_{2\otimes 2} = \begin{pmatrix} w_{++}^{13} & w_{++}^{14} & w_{++}^{23} & w_{++}^{24} \\ w_{+-}^{13} & w_{+-}^{14} & w_{+-}^{23} & w_{+-}^{24} \\ w_{-+}^{13} & w_{-+}^{14} & w_{-+}^{23} & w_{-+}^{24} \\ w_{--}^{13} & w_{--}^{14} & w_{--}^{23} & w_{--}^{24} \end{pmatrix}$$

$$E_{2\otimes 2} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Стохастическая матрица кудитов

Столбцы стохастической матрицы M в квантовом случае являются нелинейными функциями от углов Эйлера. Этим обусловлен сдвиг верхних границ неравенств Белла в квантовой механике.

Получено известное неравенство Белла в томографическом представлении пользуясь формулов $B = \text{Tr}(EM)$. Отсюда определен вид матрицы E .



Обобщение неравенства БКХШ

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\text{Tr}(\hat{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\hat{C})| = |m_{ij}c_{ji}| =$$
$$= |\mathbf{C}_1(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_2) + \mathbf{C}_3(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_1) + \mathbf{C}_4(\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2)|$$

$$\mathbf{c}_k = \{c_k(m_1, m_2)\}$$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1(c_{11}y_1 + c_{12}(1 - y_1) + c_{21}y_2 + c_{22}(1 - y_2)) +$$
$$+(1 - x_1)(c_{13}y_1 + c_{14}(1 - y_1) + c_{23}y_2 + c_{24}(1 - y_2)) +$$
$$+x_2(c_{31}y_1 + c_{32}(1 - y_1) + c_{41}y_2 + c_{42}(1 - y_2)) +$$
$$+(1 - x_2)(c_{11}y_1 + c_{12}(1 - y_1) + c_{21}y_2 + c_{22}(1 - y_2))|$$



Получение матрицы E

В классической томографии числа Белла представляют с собой значения функции В на вершинах четырехмерного куба.

Из-за того, что функция В удовлетворяет уравнению Лапласа, можно легко получить ограничения на матрицу С.

Оттуда установлено, что $C=E$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} B(G_{0000}) = c_{14} + c_{12} + c_{24} + c_{22}, & B(G_{1111}) = c_{31} + c_{41} + c_{11} + c_{21} \\ B(G_{0001}) = c_{14} + c_{12} + c_{23} + c_{21}, & B(G_{0010}) = c_{11} + c_{13} + c_{24} + c_{22} \\ B(G_{0100}) = c_{14} + c_{32} + c_{42} + c_{24}, & B(G_{1000}) = 2(c_{12} + c_{22}) \\ B(G_{1100}) = c_{12} + c_{22} + c_{42} + c_{32}, & B(G_{1110}) = c_{11} + c_{22} + c_{31} + c_{42} \\ B(G_{0011}) = c_{13} + c_{23} + c_{11} + c_{21}, & B(G_{1011}) = 2(c_{11} + c_{21}) \\ B(G_{0111}) = c_{13} + c_{23} + c_{31} + c_{41}, & B(G_{1010}) = 2(c_{11} + c_{22}) \\ B(G_{0101}) = c_{14} + c_{23} + c_{32} + c_{42}, & B(G_{1001}) = 2(c_{12} + c_{21}) \\ B(G_{1101}) = c_{12} + c_{21} + c_{32} + c_{41}, & B(G_{0110}) = c_{13} + c_{24} + c_{31} + c_{42} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (c_{11} + c_{14} - c_{12} - c_{13})x_1 + (c_{31} + c_{34} - c_{32} - c_{33})x_2 + (c_{13} + c_{33} - c_{14} - c_{34}) \\ B_{y_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (c_{21} + c_{24} - c_{22} - c_{23})x_1 + (c_{41} + c_{44} - c_{42} - c_{43})x_2 + (c_{23} + c_{43} - c_{24} - c_{44}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (c_{11} + c_{14} - c_{12} - c_{13})y_1 + (c_{21} + c_{24} - c_{22} - c_{23})y_2 + (c_{12} + c_{22} - c_{14} - c_{24}) \\ B_{x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (c_{31} + c_{34} - c_{32} - c_{33})y_1 + (c_{41} + c_{44} - c_{42} - c_{43})y_2 + (c_{32} + c_{42} - c_{34} - c_{44}) \end{array} \right.$$



Спиновые корреляции в квантовой томографии



$$\begin{aligned}\langle \hat{C} \rangle &= \sum_{m_1, m_2, m'_1, m'_2} c_{m_1 m_2, m'_1 m'_2} w_{m_1 m_2, m'_1 m'_2} = \\ &= \sum_{m'_1, m'_2} \langle m'_1 m'_2 | \hat{C}^\dagger \left(\sum_{m_1, m_2} |m_1 m_2\rangle \langle m_1 m_2| \right) \hat{M}_w |m'_1 m'_2\rangle = \\ &= \text{Tr} \left(\hat{C}^T \hat{M}_w \right) = \langle \hat{C} | \hat{M}_w \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{2\otimes 2}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4) = \\
& = 2 + 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)^2 + 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right)^2 + \\
& + 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)^2 - 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right)^2 - 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 - 4 \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)^2 - \\
& - 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_3) - \\
& - 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_4) - \\
& - 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_3) + \\
& + 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_4) + \\
& + 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_3) + \\
& + 4 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_4) + \\
& + 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_3) - \\
& - 4 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_4)
\end{aligned}$$

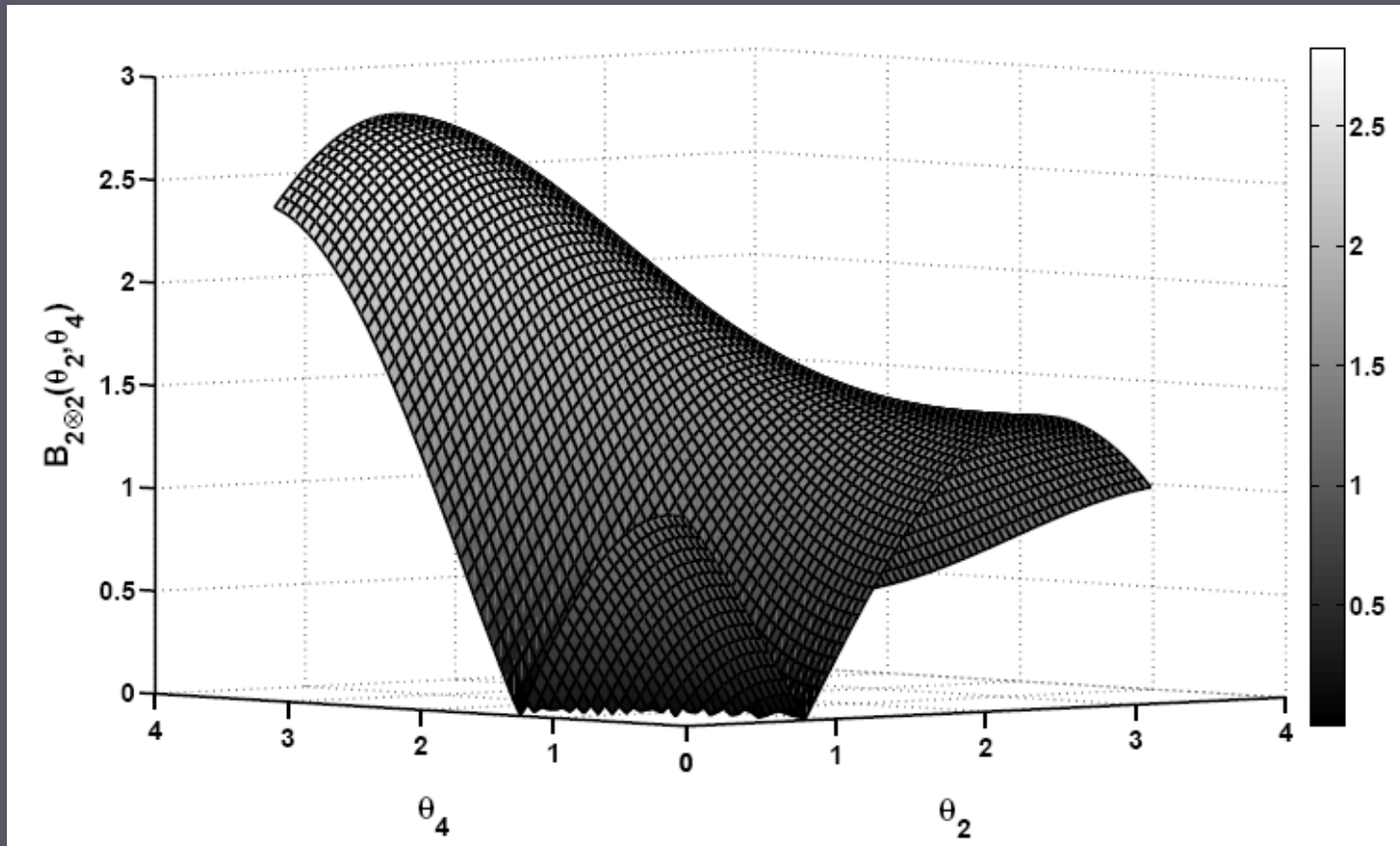
Квантовый расчет на примере двух и несколько кубитов и кутритов

На слайде видим выражение для чисел Белла двух кубитов как функцию от восьми углов измерения.

Полученное выражение позволяет проводить как аналитическое, так и численное изучение верхних границ чисел Белла в квантовой механике.

Поверхность чисел Белла для двух кубитов

Графическая зависимость чисел Белла от двух углов измерения кубитов. Пространство точки $B=2$ соответствует области нарушения неравенств Белла.





Запутанные состояния

- Состояние Белла (максимально запутанное состояние)



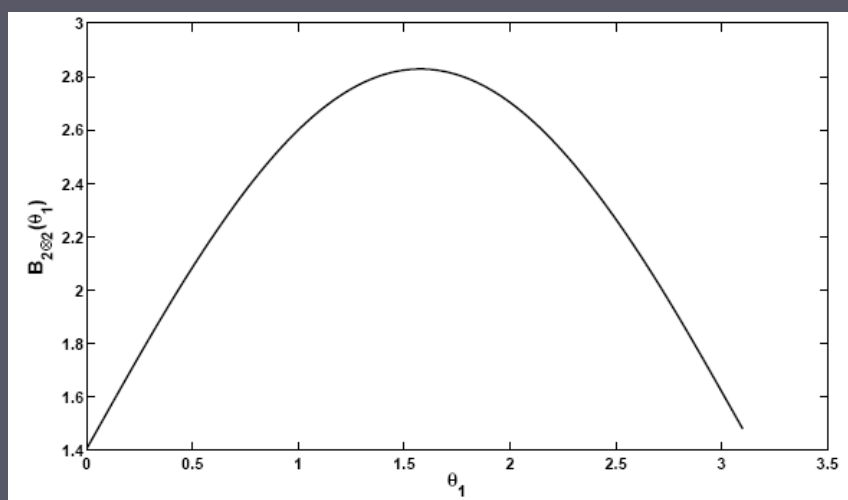
$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Состояние Вернера (запутано при параметре $1/3 < p < 1$)

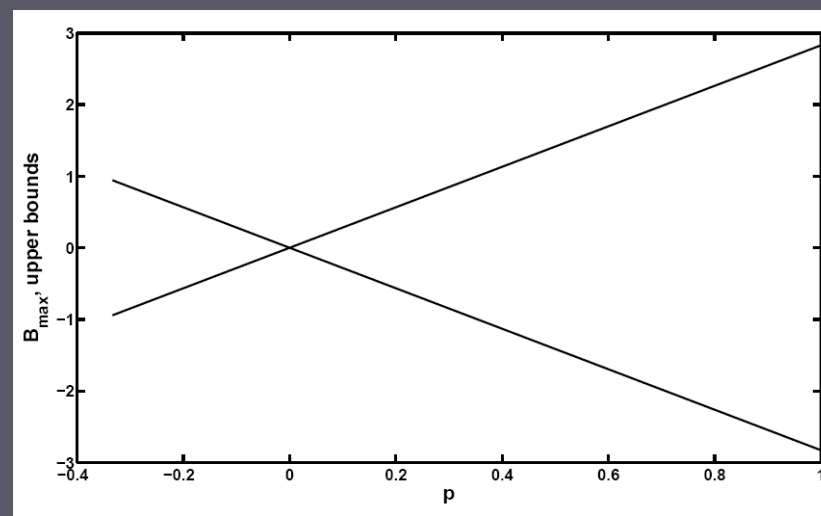
$$\rho_W(12) = \begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\hat{1} + \frac{p}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Поведение чисел Белла в окрестности границы Цирельсона

Нарушения неравенств Белла для состояния Белла и состояния Вернера.



Нарушения неравенств БКХШ
для состояния Белла.



Нарушения неравенств БКХШ
для состояния Вернера.

Вершина	Числа БКХШ
00000000	$c_{16} + c_{26} + c_{56} + c_{46} + c_{36} + c_{66}$
00000001	$c_{16} + c_{35} + c_{26} + c_{56} + c_{46} + c_{65}$
01000000	$c_{16} + c_{26} + c_{53} + c_{43} + c_{36} + c_{63}$
01100000	$c_{14} + c_{26} + c_{53} + c_{41} + c_{36} + c_{63}$
01010101	$c_{15} + c_{35} + c_{25} + c_{52} + c_{42} + c_{62}$
10000000	$c_{13} + c_{33} + c_{23} + c_{56} + c_{46} + c_{66}$
10101010	$c_{21} + c_{11} + c_{31} + c_{54} + c_{44} + c_{64}$
11000000	$c_{13} + c_{33} + c_{23} + c_{53} + c_{43} + c_{63}$
11100000	$c_{11} + c_{33} + c_{23} + c_{53} + c_{41} + c_{63}$

Таблица 3: Числа БКХШ в системе кубит-кутрит

Функция БКХШ для системы бит-трит

$$B_{2\otimes 3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = 4 + 4x_1z_1 - 2x_2t_2 + 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2z_1 + 4x_2y_1 + 2x_2z_2 + \\ + 2x_1z_2 + 2x_1t_2 + 4x_1t_1 - 6x_1 - 2x_2 - 4y_1 - 4z_1 - 2y_2 - 2z_2 + 2x_2y_2 - 4x_2t_1$$

Функция БКХШ для системы кубит-кутрит

$$B_{2\otimes 3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_4) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) + \\ \cos(\theta_1) \cos(\theta_5) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_5)$$

Неравенство Белла в системе кубит-кутрит

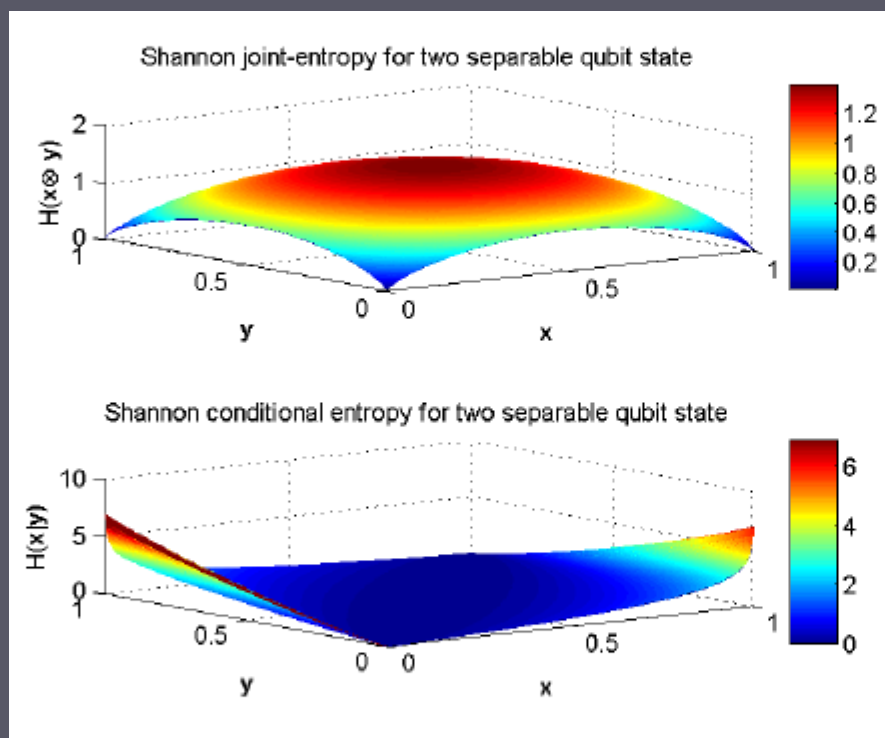
В таблице приведены числа Белла для классического случая кубит-кутрит системы.

Явные выражения для чисел Белла в классической и квантовой томографиях.

Численное сравнение этих формул в новой верхней границе: $B=4.0612$.

Совместные и относительные энтропии для двух кубитов в классической теории информации Шеннона

В классической теории информации энтропии Шеннона удовлетворяют неравенствам, напоминающим неравенства Белла: $H(1,2) \leq H(1) + H(2)$, $H(1) \leq H(1,2)$, $H(2) \leq H(1,2)$.

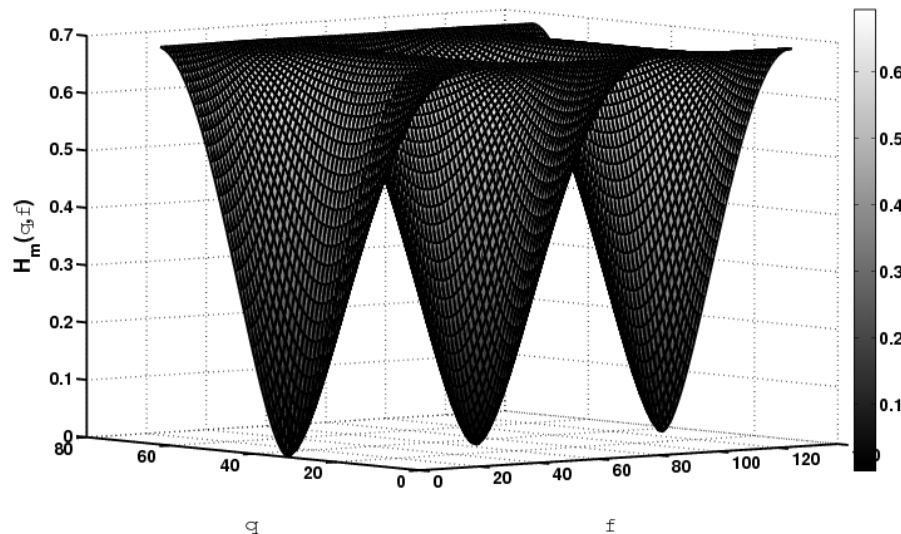
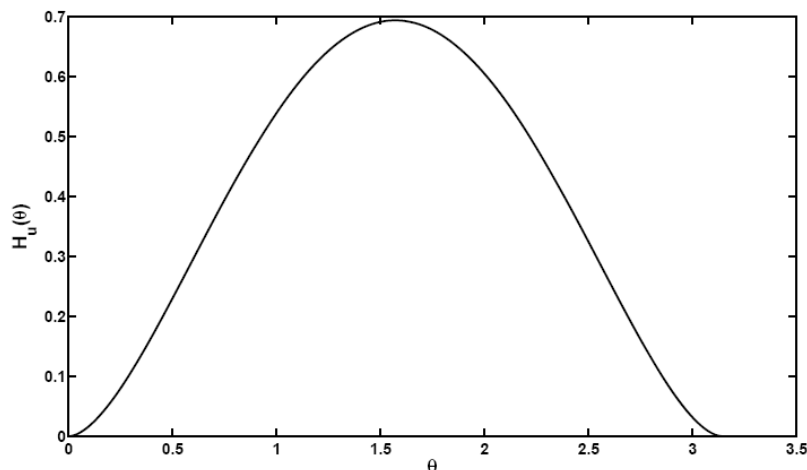




Томографическая энтропия кубита

- В квантовой томографии определение энтропии такое же как и в классической энтропии:

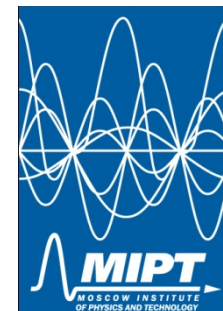
$$H(\mathbf{w}(\mathbf{n})) = -\mathbf{w}(\mathbf{n}) \ln \mathbf{w}(\mathbf{n}) = -\mathbf{w}(\varphi, \theta) \ln \mathbf{w}(\varphi, \theta)$$



Томографические энтропии для нескольких кудитов



- ▶ Для суммарной системы можно определить совместную энтропию и получить энтропии отдельных подсистем.
- ▶ Затем проверить нарушение классических энтропийных неравенств.
- ▶ В определении совместной энтропии в вероятностном представлении автоматически учтены квантовые корреляции между кудитами.



$$H(1, 2) = -\mathbf{w}^{(12)} \ln \mathbf{w}^{(12)} \equiv - \sum_{m,n} w_{nm}^{(12)} \ln w_{nm}^{(12)}$$

$$H(1) = -\mathbf{w}^{(1)} \ln \mathbf{w}^{(1)} \equiv - \sum_m w_m^{(1)} \ln w_m^{(1)}, \quad H(2) = -\mathbf{w}^{(2)} \ln \mathbf{w}^{(2)} \equiv - \sum_n w_n^{(2)} \ln w_n^{(2)}$$

$$\langle m^2 \rangle = \sum_m m^2 w_m^{(1)} = \sum_{n,m} m^2 w_{nm}, \quad \langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 w_n^{(2)} = \sum_{n,m} n^2 w_{nm}$$



Основная формула получена

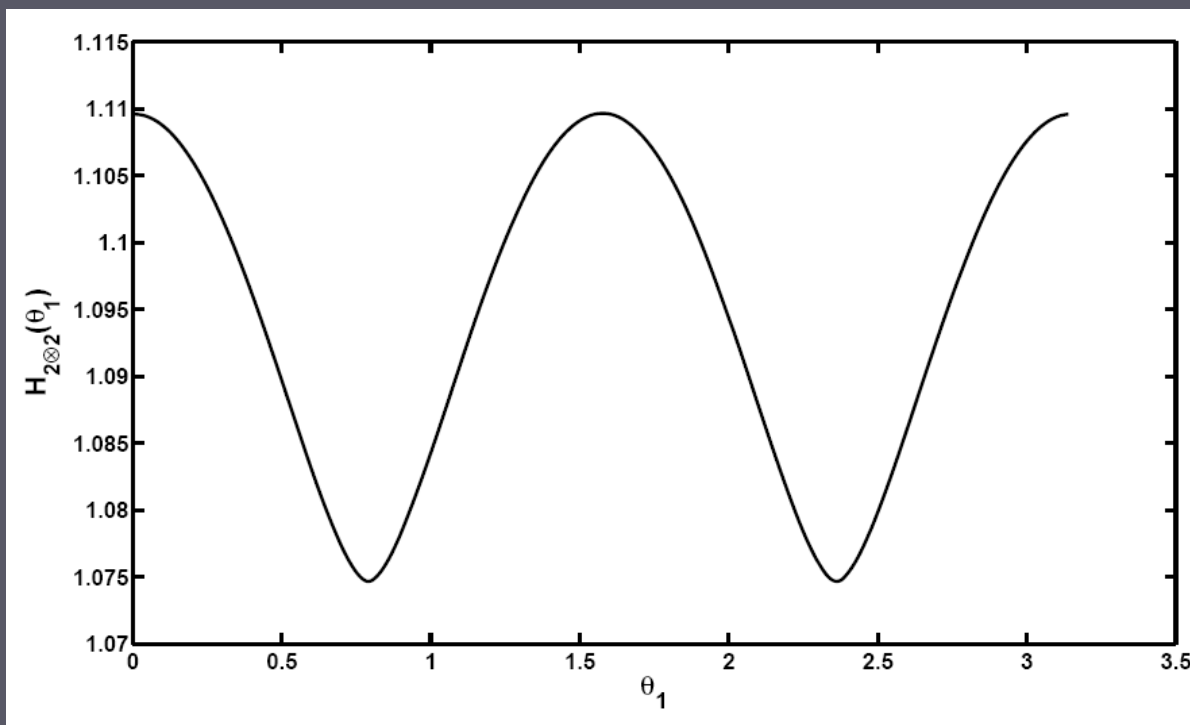
- ▶ В результате обобщения томографического подхода к изолированным кубитам, для системы из двух кубитов получаем общую формулу:



$$H(n_1, n_2, n_3, n_4) = -\frac{1}{4} \text{Tr} \left(\hat{M}_{2 \otimes 2}(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \hat{U}_4) \ln \hat{M}_{2 \otimes 2}(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \hat{U}_4) \right)$$

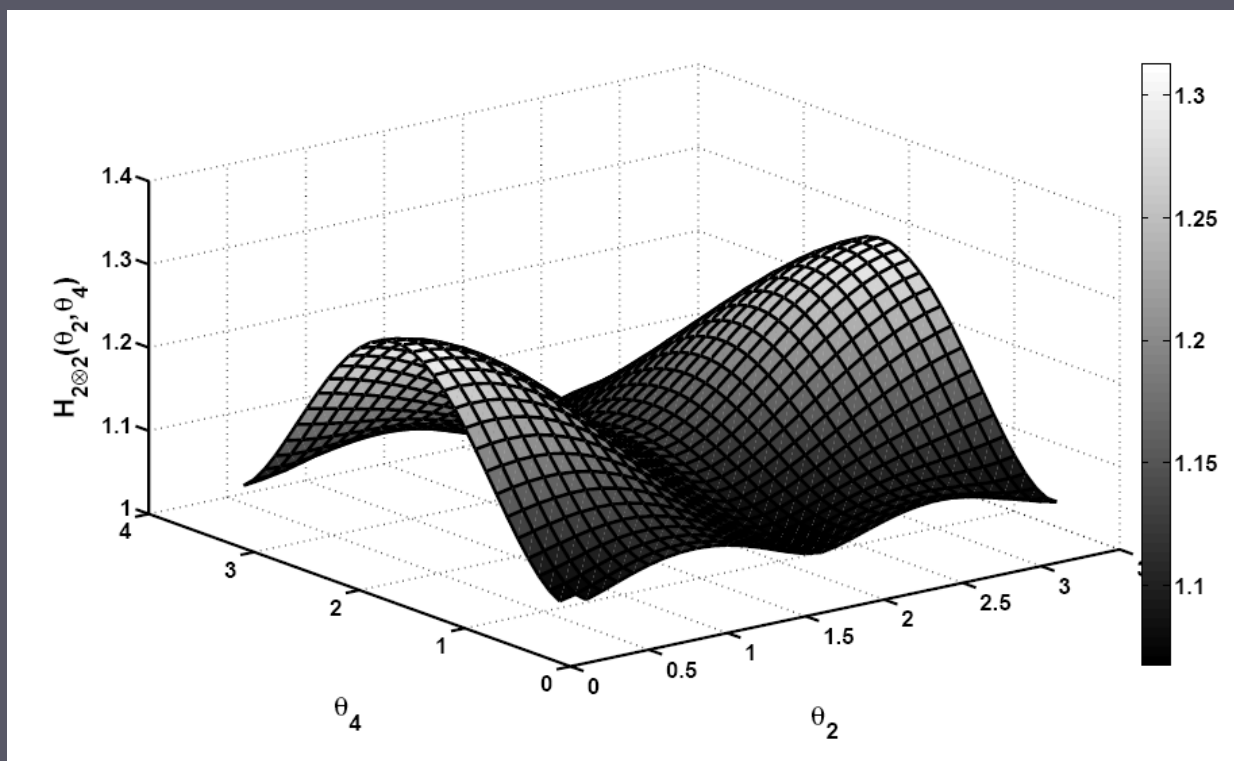
Нарушение энтропийных неравенств Белла

На этом графике показана томографическая энтропия для двух кубитов как от функция угла измерения первого кубита. Остальные углы зафиксированы.



Нарушение энтропийных неравенств Белла

Показана совместная энтропия как функция углов измерения первого и второго кубитов. В силу эффекта запутанности классические энтропийные неравенства могут в квантовой области нарушаться.





Выводы и результаты

- ▶ Построен универсальный математический аппарат для вывода неравенств Белла для произвольных многокудитных (многоспиновых) состояний.
- ▶ Теория позволяет анализировать (частично) запутанные и сепарабельные состояния.
- ▶ Теория позволяет найти точные выражения для верхних пределов неравенств Белла.
- ▶ Получены энтропийные неравенства Белла; новые неравенства позволяют усилить критерии сепарабельности и запутанности квантовых состояний.





Работы и публикации

1. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, *"Bell-type inequalities in classical probability theory"*, Journal of Russian Laser Research, 30, 1, 82-100, (2009)
2. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko *"Bell-type inequalities and upper bounds for multiqudit states I"*, Journal of Russian Laser Research, 30, 4, 338-358, (2009)
3. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, D. K. Udumyan, *"Bell-type inequalities and tomographic entropies of multiqudit states"*, Journal of Russian Laser Research, 31, 1, 61-69, (2010)
4. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, *"The probability representation of quantum states"*, MFTI (2010)
5. L. V. Akopyan, V. I. Man'ko, *"Two-mode vacuum squeezed states in tomographic probability"*, Journal of Russian Laser Research, in preparation.
6. L. V. Akopyan, *"Bell-type inequalities and Upper bounds of multi-qudit states"*, Poster presentation in XIII International Conference of Quantum Optics and Quantum Information, May 28–June 1, 2010, Kyiv, UKRAINE

